CALCOLO NUMERICO – prof. Campa Maurizio

⇒ Lezione del 27/09/11

- Sito del corso:

portale DMA → persone → Campa → didattica → Calcolo numerico 2011/2012

- Argomenti:

1) zeri di funzioni di variabile reale
2) sistemi di equazioni lineari
3) interpolazione (campionamento)
4) approssimazione (minimi quadrati)

0) modello del calcolatore

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

0) – Il CALCOLATORE è un dispositivo programmabile che serve per fare calcoli.

L'operazione che il calcolatore sa fare meglio è il calcolo del valore di una funzione in un punto

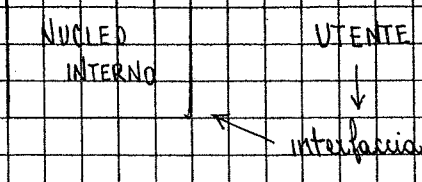
es. di programmi: OCTAVE, SCILAB e MATLAB.

es. OCTAVE: > sin (86,3) (calcolo del valore del sin in un punto)

ans = −0,99560

Noi dobbiamo capire come il calcolatore ha prodotto il risultato.

La struttura del calcolatore è questa:



I programmi di calcolo forniscono all'utente un' INTERFACCIA per accedere al nucleo interno

Il nucleo interno è caratterizzato da:

- insieme dei numeri di macchina: sono i numeri con cui il calcolatore lavora.
- insieme delle operazioni (o funzioni) elementari: è ciò che il nucleo interno sa fare con i numeri di macchina.

– Consideriamo $x \in \mathbb{R}$, non zero, e β intero ≥ 2 (base)

Allora $\exists!\ b \in \mathbb{Z}$ (esponente di x) t.c. posto:

$$g = \frac{|x|}{\beta^b} \qquad \text{(frazione di x)}$$

si ha:

$$g \in [\beta^{-1}, 1)$$

MASTER COPY

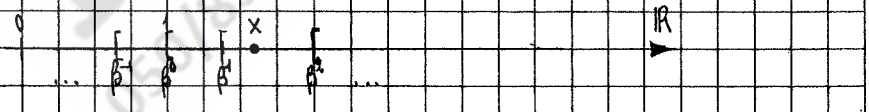
Tel. 388/9837745

Altro modo per dire questa cosa: $\exists!$ modo di scrivere x nella forma:

$$x = (-1)^s \beta^b g$$

con $s \in \{0,1\}$ (segno di x), $b \in \mathbb{Z}$ e $g \in [\beta^{-1}, 1)$.

DOI) Proviamo a dimostrare che è vero. Supponiamo $x > 0$



Consideriamo sulla retta l'intervallo $[\beta^{-1}, 1)$.

Ogni intervallo costituisce una partizione (insiemi disgiunti la cui unione dà $\mathbb{R}$) di $\mathbb{R}$. x può appartenere solo ad uno di essi, diciamo $\beta^{b-1} \leq x < \beta^b$.

Ma da questa disuguaglianza, dividendo per β^b si ha:

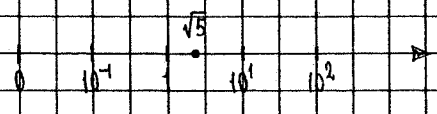
$$\beta^{-1} \leq \underbrace{\frac{x}{\beta^b}}_{=g} < 1$$

come volevasi dimostrare.

N.B.: la base non c'entra niente con x!

es. • $x = \sqrt{5}$

$\beta = 10$



Dal disegno deduco che $b = 1$:

$$10^0 \leq \sqrt{5} < 10^1$$

E quindi:

$$g = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{e} \quad s = 0$$

• $x = \sqrt{5}$

$\beta = 2$ $\Rightarrow$ $b = 2$, $g = \frac{\sqrt{5}}{4}$ e $s = 0$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

— ∘ — ∘ — ∘ — ∘ —

$\Rightarrow$ <u>Lezione del 29/09/11</u>

- Consideriamo il numero reale con la notazione posizionale usuale:

$\beta = 10$ $g = \sqrt{2} = 1,4142\ldots$

Il numero g è espresso in base β:

$g = c_1 c_2 c_3 c_4$ (ad esempio) lunghezza = 4

$\Downarrow$

$$g = c_1\beta^1 + c_2\beta^0 + c_3\beta^{-1} + c_4\beta^{-2} = \sum_{k=1}^{4} c_k\beta^{*}$$

Ma $g \in [\beta^{-1}, 1)$ si traduce con:

$g = 0, c_1 c_2 \ldots$

dove $c_1 \neq 0$ necessariamente.

- es. $\beta = 2 \quad \Rightarrow \quad s = 0 \qquad 2^{-4} \le x \le 2^{-3}$

$x = \frac{1}{10} \qquad b = -3$

$g = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Ora voglio esprimere g in base 2:

$\frac{4}{5} = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$

$\frac{8}{5} = c_1, c_2 c_3 c_4 = \textcircled{1} + \frac{3}{5} = \textcircled{c_1} + 0, c_1 c_2 c_3$

$\frac{3}{5} = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$

$\frac{6}{5} = c_2, c_3 c_4 \dots = \textcircled{c_2} + 0, c_3 c_4 = \textcircled{1} + \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} = 0, c_3 c_4 \dots$

$\frac{2}{5} = c_3, c_4 \dots$

$\dots$

$c_1 = c_2 = 1$ e $c_3 = c_4 = 0$ (poi si ripete perché ottengo $\frac{4}{5}$)

Quindi: $\frac{4}{5} = 0,1100\,1100\,1100 \dots$

- Introduciamo l'insieme:

Def. 01) $F(\beta, m) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x = (-1)^s \beta^b \underbrace{0, c_1 \dots c_m}_{\text{scrittura posizionale della frazione in base } \beta} \text{ con } s \in \{0,1\}, b \in \mathbb{Z}, c_1 \neq 0 \text{ e } c_1, \dots, c_m \in \{0, \dots, \beta - 1\}\}$

b intero $\ge l$
m intero > 0

INSIEME dei NUMERI IN VIRGOLA MOBILE, base β, precisione m [F sta per "floating"]

N.B.: il significato della virgola dipende dall'esponente della base

es. $F(10,1) = M$

$0 \in M$ (zero è stato inserito a parte nell'insieme, perché non può essere rappresentato poiché $c_1 \neq 0$)

$\frac{1}{10} \in M$ $\quad \frac{1}{10} = 0,1 = 10^0 \cdot 0,1$ OK

$\frac{11}{100} \notin M$ $\quad \frac{11}{100} = 0,11 = 10^0 \cdot 0,11$ No!

Prendo $s \notin \mathbb{Q}$: $s \notin M$, perché la sua rappresentazione decimale non è finita!

In realtà $s \notin F(\beta, m) \quad \forall \beta, m$.

N.B.: $F(\beta, m) \subset \mathbb{Q}$

→ $\forall m$ intero si ha che $\frac{1}{10} \notin F(2, m)$

- elementi positivi di M con esponente 0 : $\{0,1 ; 0,2 ; \dots ; 0,9\} = B$
- " " " " 3 : $\{10^3 \cdot 0,1 ; 10^3 \cdot 0,2 ; \dots ; 10^3 \cdot 0,9\} = 10^3 B$
- " negativi " " b : $\{-10^b \cdot 0,1 ; \dots \} = (-1) \cdot 10^b \cdot B$

- Alla luce dell'esempio precedente, possiamo riscrivere $F(\beta, m)$ così:

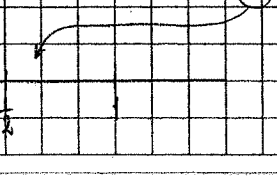
$$F(\beta, m) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} (-1) \beta^b B \cup \{0\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} \beta^b B$$ (unione di infiniti sottinsiemi finiti)

PROPRIETÀ di $F(\beta, m)$:

- $F(\beta, m) \subset \mathbb{Q}$ ed è simmetrico rispetto a 0
- $F(\beta, m)$ è numerabile, ordinato (come sottinsieme di $\mathbb{Q}$)
- 0 è un punto di accumulazione di $F(\beta, m)$
- $\sup(F(\beta, m)) = +\infty$
- $\inf(F(\beta, m)) = -\infty$

- es. Decidere se $\frac{7}{8} \in F(2, 2)$

1) determinare base ed esponente di $\frac{7}{8}$ in base 2



$b = 0 \Rightarrow g = \frac{7/8}{2^0} = \frac{7}{8}$